

MAI 1 - nekonečné posloupnosti - další příklady.

1. Vypočítejte následující limity (nebo ukažte, že neexistují):

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}}{n}$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

2. Víte-li, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, vypočítejte limity

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

3. Užití věty o limitě monotónní posloupnosti.

a) Ukažte, že rekurentně definovaná posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ je rostoucí a shora omezená a že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

b) Ukažte, že rekurentně definovaná posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$ je klesající a zdola omezená. Určete její limitu.

c) Definujme rekurentně posloupnost $\{a_n\}$, kde

$$a_1 = 2 , \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) . \text{ Ukažte, že } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2} .$$

d) Ukažte, že platí: je-li $0 \leq a_n$, pak posloupnost $\left\{ \sum_{n=1}^N a_n \right\}$ konverguje nebo diverguje k $+\infty$.

e) Ukažte, že platí :

Je-li $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$, potom, konverguje-li posloupnost $\left\{ \sum_{n=1}^N b_n \right\}$, pak také konverguje

posloupnost $\left\{ \sum_{n=1}^N a_n \right\}$ (tedy, konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$).

(srovnávací kritérium konvergence řad)

Pokuste se rozhodnout (užitím tohoto tvrzení) o konvergenci , resp. divergenci, řady :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot \sqrt{n}} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2 + 3} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n^2 + 1} \right)^2 .$$

4. Problémky:

Dokažte následující tvrzení:

a) Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$ a nechť platí $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - b_n| < \varepsilon$. Potom také $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

b) Necht' posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská, $\{a_{n_k}\}$ je posloupnost vybraná z $\{a_n\}$ a necht'

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a. \text{ Potom také } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

c) Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a > 0$, pak je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Zvažte, zda tvrzení platí i pro $a = 0$ ($a_n > 0$).

6. Ještě „aritmetika“ limit:

a) Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, co lze říci o $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$? Tvrzení dokažte.

Na příkladech ukažte, že nelze formulovat žádné pravidlo pro součet v případě, že $a = \infty$ a $b = -\infty$.

Co lze říci (a co nelze) pro $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$?

b) Spočítejte limity:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + n^4}{n^2 + n!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n!}{n^4 + 4(n+1)!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + \sin n! + n!}{n^3 + 2n!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n n!}{3n!}.$$